日本応用数理学会：チュートリアルセミナー資料

2004.4.27

東京大学名誉教授 川井 忠彦

# 有限要素法に賭ける夢

## - はじめに -

世の中で起こる現象は森羅万象、すべからく非線形である。

Gauss は「数学は科学の女王であると」と言ったと伝えられているが、それは線形の世界に限られる。1939 年 12 月 27 日 von Kármán は J. W.Gibbs の第 15 回記念講演：”The Engineer Grupples with Nonlinear Problems”で、これからの技術者の進むべき進路をはっきり示唆された。それから 65 年、電子計算機の驚異的高速化・大容量化と共に漸く人類の非線形現象への挑戦が本格化して来た。原子力、宇宙開発、情報革命、生命科学、ナノテクノロジー、そして複雑系等々終わりのない非線形現象との戦いの真只中にあるが、それは非線形問題を増分法（incremental method）により線形化し変分法（variational method）で解くかあるいは反復法（iteration method）で近似解を求める実用解法の目覚ましい進歩によるものと思われる。その代表は有限要素法と差分法であろう。

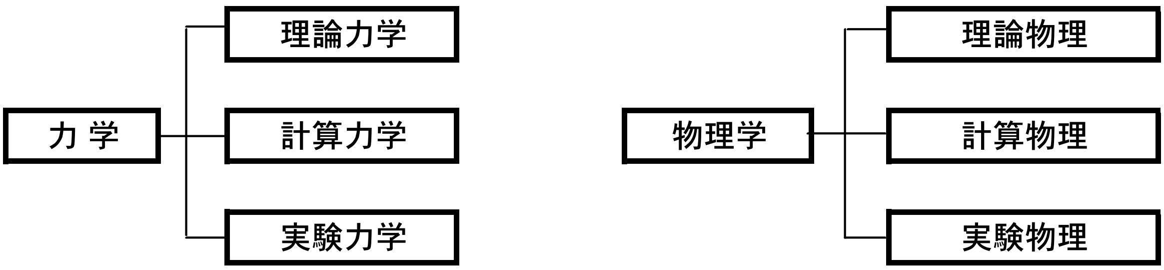
*Theodore von Kármán*

有限要素法の研究・教育に半世紀に亘って携わってきた者の一人として後に続く若い世代への希望と夢を記して、この小論を送りたい。

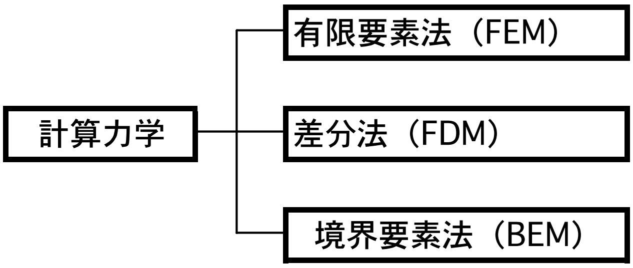
## 1. 計算工学（Computational Engineering）と有限要素法の発展

計算工学とは、計算力学（Computational Mechanics）を用いて工学における研究開発・開発・生産を行う新しい学問分野を言う。

（1）計算力学は力学における第三の学問分野



（2）計算力学を構成する 3 つの主要解法



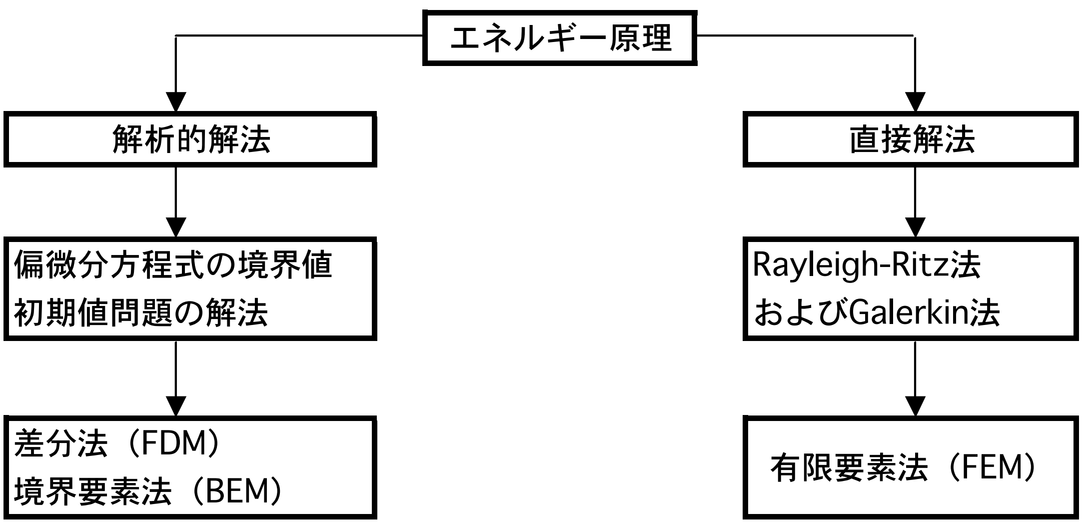

## 有限要素法（Finite Element Method）の発展

有限要素法（FEM）はボーイング航空機製造技術者により開発され、1956 年アメリカ航空学会において発表された手法。

・1956　論文発表
・1960　汎用構造解析プログラム開発と産業界への普及
・1970　構造解析から非構造解析時代へ
・1980　計算力学全盛時代→CAD/CAM、CAE、CIM 時代の出現
・1990　非線形現象の解明への挑戦

**我が国における発展**　：日本鋼構造協会→造船ブーム→建設・自動車産業への普及
**21 世紀の課題**　：ナノテクノロジー、バイオテクノロジー、複雑系への挑戦

## 固体力学における変分原理



### 米ソ宇宙開発競争と NASTRAN

前世紀末の米ソ宇宙開発競争で人類初の有人ロケットを打ち上げたのは、ソビエト連邦である。当時のソビエトでは、電子計算機の開発ではアメリカの後塵を拝し、有限要素法は勿論知られていなかった。それにも拘わらずこの人類初の快挙を成し遂げたソビエト科学技術の基礎には、スイスの生んだ大数学者 Leonhard Euler が招かれ長年に亘ってレニングラードで数学・力学・物理学の若手俊秀の育成を行ったと言う伝統があることを忘れてはならない。

この”スプートニック・ショック”を受けたアメリカはケネディ大統領の挙国一致の宇宙開発政策の元、Apollo 11 号月着陸の偉業を達成するのである。そして今、世界中の企業が使っている汎用プログラム”NASTRAN”は正しくアメリカ宇宙開発の副産物として誕生したのである。

## 2. 有限要素法の理想像

今から半世紀前、電子計算機が世の中に未だ現れていなかった頃、骨組構造解析はマトリックス構造解析法（matrix method of structural analysis）が主流で、変位を未知量にとる変位法（Displacement Method、以後 DM と略記）と応力を未知量にとる応力法（Force Method、FM と略記）または平衡法（Equilibrium Method、EM と略記）が存在し、互いに主導権争いをしていた。ところが、1956 年米国ボーイング社の M.J.Turner 率いる開発チームが前者の流れを踏む”直接剛性法（Direct Stiffness Method）”と呼ばれる新構造解析法を発表するに及んで、この勝負に決着がついた。

その後、この手法は”有限要素法（Finite Element Method、FEM と略記）”と名を改めて差分法（Finite Difference Method、FDM と略記）と並び計算力学（Computational Mechanics）の主流を形成して行くことになったのである。ところが、DM は仮想仕事の原理、FM は補仮想仕事の原理を基礎とし、前者の方法で近似解を求めると歪みエネルギーは高め、よって変位や応力は低めの答えが得られ、後者の方法に従うと歪みエネルギーは低め、よって変位や応力は高めの評価が得られることが理論的に判っていた。従って、近似解の精度を正確に評価するためには両者の方法で正解の存在範囲を挟み打ちにして安全な設計ができるよう確認することが必要である。

開発競争に敗れた後者の方法は忽ち消滅してしまい、構造解析結果の信頼性を確認する方法は未完成のまま CAE 化が進行することになってしまったのである。アメリカは 1969 年、Apollo 11 号の月着陸に自信を得て超高速・大容量電子計算システムの開発を進め、先端科学技術開発の分野で世界のリーダーになって行ったのである。

確かに限りなく進歩する超高速・大容量電子計算システムの使用を前提とした科学技術開発が今後の技術革新の主流となると思われるが、それ以外に進むべき道はないのであろうかと、私は1970年以降考え続けてきた。それには消滅してしまった”応力法”を復活させ、線形解析だけでなく非線形解の存在範囲をも上界と下界で挟む実用的解法を確立する以外に進むべき道はないと判断し、遅々とした歩みであったが、半世紀の歳月を費やし2002年初頭に漸くその曙光を見出す所まできたと考えている。

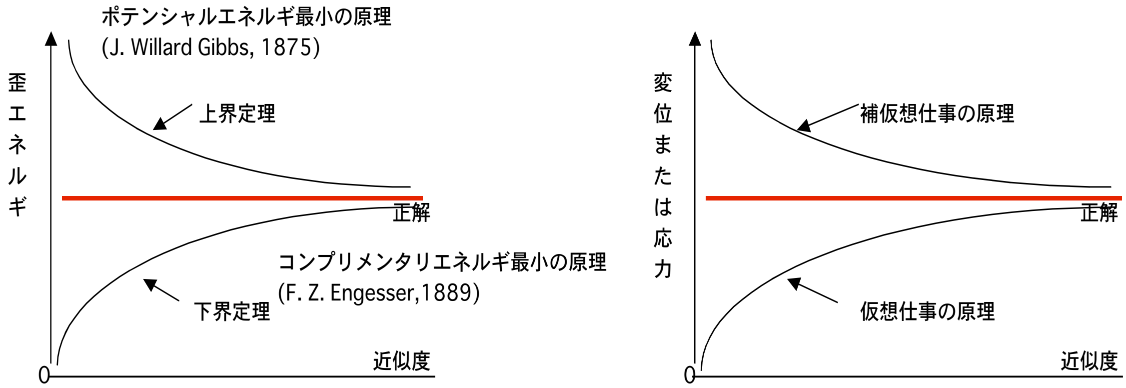
この点に関し私と同じ様な意見を持っていた大学者 Maurice A. Biot の言葉をここに引用しておきたい。M. A. Biot 博士はベルギー出身で数学、物理、工学等いくつもの博士号を持つ天才肌の学者で今日非線形問題の解析法として標準化されている増分法（incremental method）を有限要素法の生まれる10年以上前に提案した。von Kármán とパサデナの CIT 時代に著した“工学者のための数学的方法”は私の学生時代の愛読書の一つであったことを述べておきたい。

最近の文献調査の結果、J.B.Martin が1966年から1975年に掛けて非弾性材料に関する同じ様な原理を導いていることが判ったが、ここで述べた様な形での纏め方になっていない様である。その最も新しい2つの論文を以下に示す。

（１）J. B. Martin and A.R, S, Ponter
“On dual energy theorems for a class of elastic/plastic problems due to G. Maier”
J. Mech. Phys. Sol.,20, 301, (1972)

（２）J.B.Martin
“On the Kinematic Minimum Principle in Classical Plasticity”
J. Mech. Phys. Sol., 23, (1975)

## 仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理

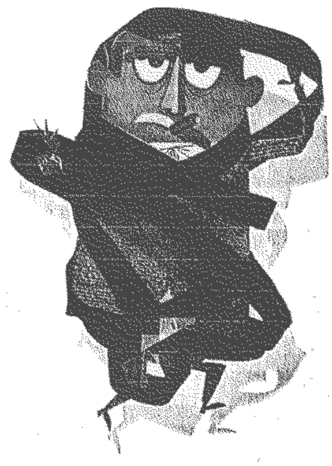


*The winner of this year's Timoshenko Medal reminds us that engineering is more than piling complexity. Great engineers cut through to simple concepts, simple solutions.*
*It is a creative art.*

## Are we Drowning in Complexity ?

By M. A. Biot (Mem. ASME) from Mechanical Engineering Feb. 1963

The name of Timoshenko – the teacher, scholar, engineer, and scientist - evokes a brilliant phase and tradition in the practice of science and engineer which unfortunately seems to be on the decline. This is the tradition of clarity, simplicity, intuitive understanding, unpretentious depth, and a shunning of the irrelevant.



There is, of course, no merit in sophistication for its own sake. In the understanding of the physical world and particularly in the area of technological applications, it is important to perceive what is irrelevant. The level of irrelevance involves a value judgment which usually requires subtle habits of thought related to natura1 endowment and previous experience.

We should not overlook the importance of simplicity combined with depth of understanding not only for its cultural value, but as a technological tool. It leads to quantitative predictions without laborious and costly calculations; it suggests new inventions and simple solutions of engineering problems. Aside from obvious economic advantages, it also provides an important quality in engineering design, namely, reliability. In this respect one cannot help reflect on our dismal record of staggering cost and repeated failures in the field of rocketry.

Deeper physical insight combined with theoretical simplicity provides the shortcuts leading immediately to the core of extremely complex problems and to straightforward solutions. This cannot be achieved by methods which are sophisticated and ponderous even in simple cases.

**The Red Tape of Formalism**

The process of thought which is involved here may be described as “cutting through the scientific red tape” and bypassing the show-grinding mills of formal scientific knowledge. Of course, formal knowledge is essential, but as for everything in life the truth involved a matter of balance. The instinctive embodiment of this truth is to be found more often in the politician than in the scientist. However, it is essential to the makeup of a competent engineer.

Doubt about the engineer's function in our increasingly complex technological culture has been expressed by the blunt questions, “Is the engineer obsolete? Should he be replaced by the scientist?” Although such questions are the product of ignorance, the situation is such that, in this country at least, they find a respectable echo.

What about the physicist? Speaking in general and with due respect for exceptional personalities endowed with outstanding natural ability, I think the physicist has turned away from his own tradition and has tended・・・・・（以下省略）。

---

Based on an address delivered at the Applied Mechanics Dinner during the 1996 ASME Winter Annual Meeting. The occasion was the presentation to Dr. Blot of the Timoshenko Medal, an annual award In recognition of distinguished contributions to applied mechanics

## 統一エネルギー原理導出のプロセス

$\sigma_{ij}$

$u_i$

$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$

$t_i=\sigma_{ij}n_j$ $on\ S_\sigma$

$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV$$

Gaussの発散定理

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV=\int_s t_i u_i dS-\int_v \sigma_{ij,j}u_i dV$$

**固体力学境界値問題**

$\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ $in\ V$

$u_i=\bar{u}_j$ $on\ S_u$

$t_i=\bar{t}_j$ $on\ S_\sigma$

$S=S_u+S_\sigma$

エネルギー保存則

$for\ true\ u_i\ and\ \sigma_{ij}$

$$\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV=\int_v \bar{p}_i u_i dV+\int_{S_\sigma}\bar{t}_i u_i dS+\int_{S_u}\bar{u}_i t_i dS$$

$$\delta\int_v \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV-\int_v \bar{p}_i\delta u_i dV-\int_{S_\sigma}\bar{t}_i\delta u_i dS-\int_{S_u}\bar{u}_i\delta t_i dS=0$$

$(w.r.t.u_i\ \&\ \sigma_{ij})$

## 統一エネルギー原理の３つの表現

形式（I）

$$\delta\int_{v}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv-\int_{v}\bar{p}_{i}\delta u_{i}dv-\int_{S\sigma}\vec{t}_{i}\delta u_{i}ds$$
$$-\int_{Su}\bar{u}_{i}\delta t_{i}ds=0$$
$$(\mathrm{w.r.t.}\ u_{i}\ \&\ \sigma_{ij})$$

形式（II）

$$\left(\int_{v}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dv-\int_{v}\bar{p}_{i}\delta u_{i}dv-\int_{S\sigma}\vec{t}_{i}\delta u_{i}ds\right)$$
$$+\left(\int_{v}\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dv-\int_{Su}\vec{u}_{i}\delta t_{i}ds\right)=0$$
$$(\mathrm{w.r.t.}\ u_{i}\ \&\ \sigma_{ij})$$

形式（III）

$$\int_{S\sigma}(t_{i}-\vec{t}_{i})\delta u_{i}ds+\int_{Su}(u_{i}-\bar{u}_{i})\delta t_{i}ds$$
$$-\int_{v}(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_{i})\delta u_{i}dv-\int_{v}u_{i}\delta\sigma_{ij,j}dv=0$$
$$(\mathrm{w.r.t.}\ u_{i}\ \&\ \sigma_{ij})$$

変位関数 $u_i(x_k)$ および応力 $\sigma_{ij}(x_k)$ を用いた固体力学の境界値問題に関する 8 種類の解法

| sol. No. | Variational Equations | constraint conditions | Remarks |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS - \int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$ | ———— | general method including other 7 methods |
| 2 | $\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS-\int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$ | $u_i-\bar{u}_i=0$ on $S_u$ | DM(I) |
| 3 | $\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS-\int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$ | $t_i-\bar{t}_i=0$ on $S_\sigma$ | EM(I) |
| 4 | $\int_V(\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i)\delta u_i dV=0$ | $u_i-\bar{u}_i=0$ on $S_u$<br>$t_i-\bar{t}_i=0$ on $S_\sigma$ | GM (I) |
| 5 | $\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS=0$ | $\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in $V$ | Trefftz's method |
| 6 | $\int_{S_\sigma}(t_i-\bar{t}_i)\delta u_i dS=0$ | $\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in $V$<br>$u_i-\bar{u}_i=0$ on $S_u$ | DM(II) |
| 7 | $\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta t_i dS=0$ | $\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in $V$<br>$t_i-\bar{t}_i=0$ on $S_\sigma$ | EM(II) |
| 8 | ———————————— | $\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ in $V$<br>$t_i-\bar{t}_i=0$ on $S_\sigma$<br>$u_i-\bar{u}_i=0$ on $S_u$ | **GM(II)** analytical solution |

remarks:

DM: Displacement Method

EM: Equilibrium Method

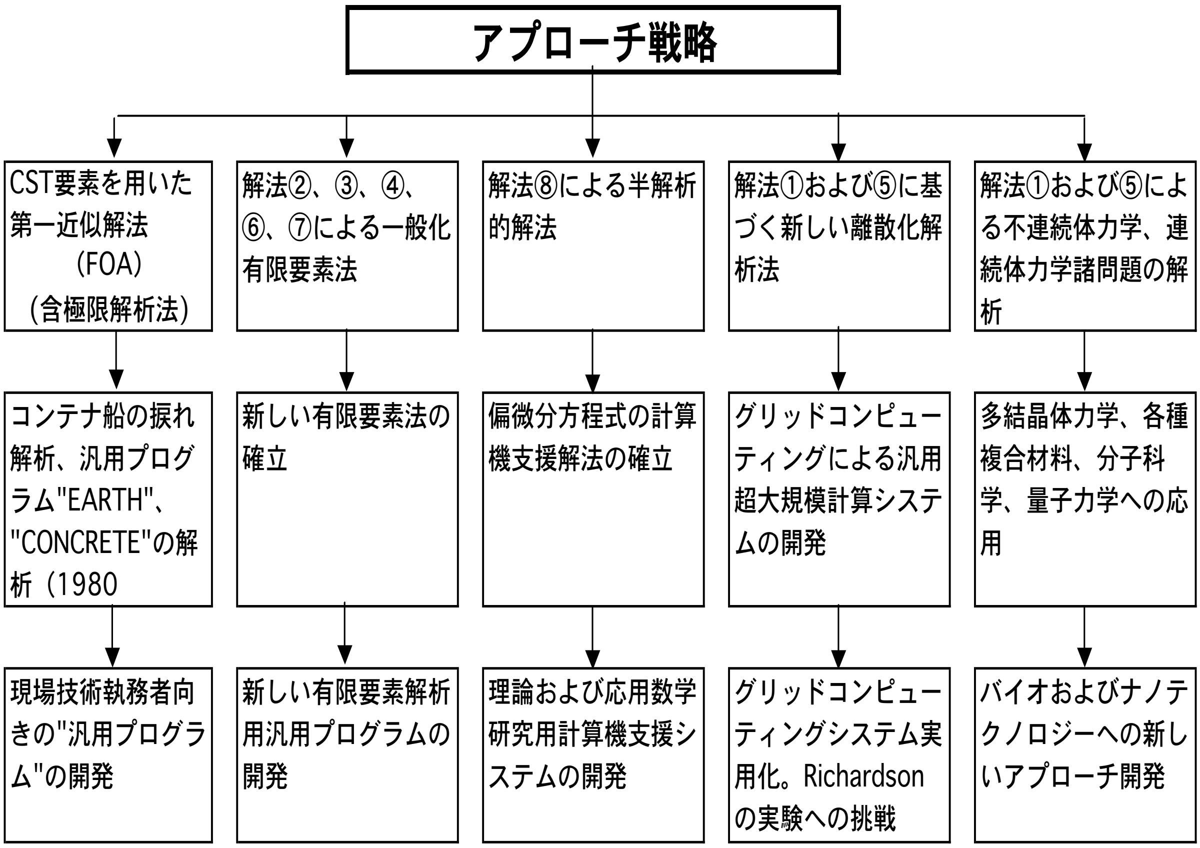
GM: Galerkin Method

(I) $\sigma_{ij}$ does not satisfy $\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ a priori

(II) $\sigma_{ij}$ satisfies $\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i=0$ a priori

Table 8 possible methods of solution derived by the present variational formulation

# 統一エネルギー原理


アプローチ戦略
CST要素を用いた第一近似解法 (FOA) (含極限解析法)
解法②、③、④、⑥、⑦による一般化有限要素法
解法⑧による半解析的解法
解法①および⑤に基づく新しい離散化解析法
解法①および⑤による不連続体力学、連続体力学諸問題の解析
コンテナ船の振れ解析、汎用プログラム"EARTH"、"CONCRETE"の解析（1980
新しい有限要素法の確立
偏微分方程式の計算機支援解法の確立
グリッドコンピューティングによる汎用超大規模計算システムの開発
多結晶体力学、各種複合材料、分子科学、量子力学への応用
現場技術執務者向きの"汎用プログラム"の開発
新しい有限要素解析用汎用プログラムの開発
理論および応用数学研究用計算機支援システムの開発
グリッドコンピューティングシステム実用化。Richardsonの実験への挑戦
バイオおよびナノテクノロジーへの新しいアプローチ開発

## ３．統一エネルギー原理の特徴

（１）この原理は変位 $u_i$ を未知量にとる仮想仕事の原理と応力 $\sigma_{ij}$ を未知量にとる補仮想仕事の原理の統一エネルギー原理であり、状態ベクトル（$u_i$, $\sigma_{ij}$）を未知量として固体力学の問題を解析すると近似解（$u_i$, $\sigma_{ij}$）の中で互いにエネルギーの攻めぎ合いがあり、近似度を増して行くと正解に自然に収束する（力学的証明は可能であるが、数学的証明は将来の課題)。

（２）この原理は応力-歪関係、歪の大きさに拘わらず成立する。換言すると非線形（大変形、非弾性）固体力学諸問題を上下界挟み打ちができる実用的変分原理を提供するものと思われる。

（３）固体の状態ベクトル（$u_i$, $\sigma_{ij}$）を未知量とする変分原理を混合変分原理（mixed variational principle）と呼び 1950 年 E. Reissner により提案された。その後、1955 年 3 月に中国の胡、日本の鷲津により一般化され、有限要素法解析の羅針盤の役を務めた。しかし、これらの原理は Lagrange の未定係数法を用いているので停留原理に留まった。

（４）この新エネルギー原理から 8 種類の解法が誘導できる。それは有限要素解析で予め要素間の状態ベクトル（$u_i$, $\sigma_{ij}$）の連続性を満足する様にして解く 6 つの解法群（一般化有限要素法）とそうでない２つの解法群に大別できる。後者のグループはユニークな無節点解法（non collocation method）を提供することになった。

（５）残りの 6 つの解法では、要素境界辺または面上で流動座標系を定義し、その座標に関し状態ベクトルを展開して遂次近似的連続性を保つ要素群を組織的に開発する方法をとる（一般化有限要素法)。この方法により状態ベクトルの連続性が合理的に保持され相当複雑にはなるが板殻構造、三次元解析や固体接触問題解析に有効な要素群の開発が可能となると思われる。また、この解法は流れ問題の有限要素解析の主流となっている Euler の方法に一致する。

（６）この６つのグループの解法の一つ（GM(II)）は要素が半解析解の形で求められる（1 次元要素の場合は厳密解)。この要素を用いる解析は原理的に境界要素法（Boundary Element Method）と等価になる。

（７）有限要素の変位関数をその要素座標系原点のまわりに Maclaurin 展開した式は次のような n 次歪ベクトル（変位 $u_i$ の n 階微分）を係数とする多項式で、次式のごとく表される。

$$u(x_i) = \sum_{k}^{n} B_k(x_i)\varepsilon_k$$

この式で零次の歪関数 $B_0(x_i)\varepsilon_0$ は構造不静定の剛体変位関数、1 次歪関数は定歪の変位関数を与えることが 1895 年、G. G. Stokes により発見されている。更に 2 次の歪関数は平面応力ないしは板曲げ問題において重要な曲線または局面の曲率または捩れ率を

成分とする歪関数で夫々平面問題、板曲げ問題の主役を務める成分である。同様にして 3 次の歪関数は多結晶体と考えられる金属材料の転位（dislocation）を表現する Riemann-Christoffel の曲率テンソルを表すことが最近明らかにされてきた。また、この要素を用いた増分解析法は正しく updated Lagragian method となる。

（８）本統一エネルギー原理が本格的活動できる舞台は当然 大変形、安定問題（幾何学的非線形問題）と材料非線形問題（弾塑性、粘弾性、破壊）の問題であろう。この場合、応力-歪関係式をどの様に与えるかが問題である。この問題は鶏が先か卵が先かの問題になり、近年は素粒子物理学の第一原理まで遡り、超高速・大容量電子計算機の力を借りて問題を解く方法が脚光を浴びているが、1972 年 著名な物性物理学者 P. W. Anderson が Science 誌（vol. 177, p.393）に「More is different」と題する論文を発表して、この考え方が誤りであることを明快に論じた。一般に科学は素粒子、原子核、固体等の凝集体、生物体質、生物等をその対象によって多くの階層に分かれ、それぞれの階層では、境界付近を除いて独自の法則が広い範囲の物質なり、現象なりをカバーしている。このような考え方は近年になってようやく物理の研究者の間に浸透してきたと伝わっている。かかる視点にたって考える時伝統的な Prandtl-Reuss の流れ理論に従い、統一エネルギー原理を基礎とする非弾性解析法をどの様に再構築するが当面の課題であろう。

（９）この様な材料科学的方向の研究に対し、その反対の方向の計算力学の展開も今後の CAE 時代の大きな研究課題であろう。その一例は自動車の耐衝撃強度設計の問題で世界中のメーカーが時間とコストの削減に苦悩している課題である。この問題をできるだけ梁または単純パネルの集合体にモデル化して解析をしようとする FOA（First Order Analysis）が注目されている。私は FOA 実現の道は極限解析および設計（limit analysis & design）の近代化であろうと思っている。この課題は統一エネルギー原理の恰好の応用例になると思っている。

（１０） 最後にロシアの数学者 S. G. Mikhlin が書いた偏微分方程式論に基づいて藤野勉（元東海大教授）が行った連続体力学諸問題の仮想仕事の原理による定式化の仕事は注目に値する。この藤野の仕事を統一エネルギー原理の立場に立って一般化すれば熱伝導、拡散、流れ、電磁界解析等と連続体力学諸問題の統一エネルギー原理による定式化の道が開かれるものと思っている。

## - 終わりに -

今世紀は Biotechnology と Nano technology の世紀と言われており、新しいドラマが次々と誕生して行くものと思われる。CAE がその原動力となることは間違いないと思われるが、それは道具（tool）に過ぎない。

コンピュータは石頭の巨人であり、IT はそれに命令を下す方法を記述したマニュアルに過ぎない。それを操作して何かを創造して行くのは誰か？それは天才と呼ばれる人々であろう。Prandtl の境界層や乱流の理論や Kármán の渦列や飛び移り座屈理論は CAE 花盛りの現代でも光り輝いている。正に科学技術史を色取るのは”思想”である。

**Imagination is more important than knowledge – Albert Einstein**

また、今世紀は、バイオとナノテクノロジーを中心に、IT が加わって、非線形問題に挑戦して行く色々な科学技術が誕生して行くことであろう。
非線形現象の解明に当たって大きな壁となるのは ab initio とか、in vivo、in situ という構成則の問題であろう。換言すると複雑系の解明においては定量化を諦め、定性的研究が本命とせざるを得ないのでなかろうか。かくして生まれたのがアンリーポアンカレーの位相数学（topology）であろう。

科學ガ進ムニ從ッテソノ全部ヲ抱括スルコトガ段々困難ニナル。ソコデ人ハ科學ヲ片手ニ切リ離シテ、ソノ一片ヲ以テ満足スル。即チ専門的ニナル。若シコノヨウナ傾向ガ増長スルナラバ、ソレハ科學ノ發達ニトッテハ憂フベキ障害デアラウ。異ナル部分ノ思ハヌ接觸カラコソ科學ノ進歩ガ起ノデアル。----**Henri Poincaré**